S. Durand

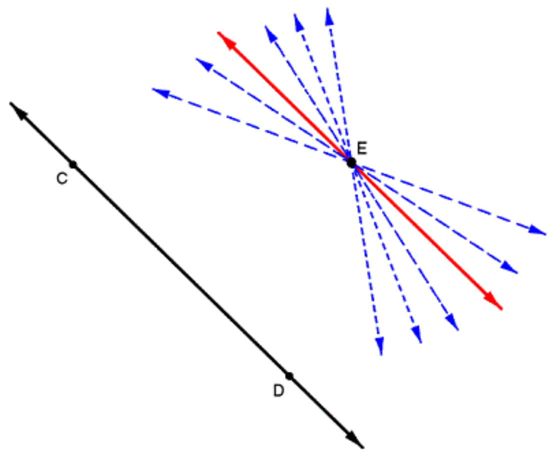
De Janos Bolyai au GPS

- La fameux 5e postulat d'Euclide -

[Complément à la capsule audio]

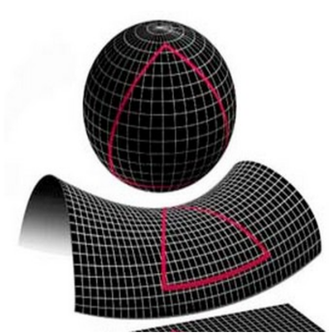
Le 5e postulat d'Euclide, appelé aussi *le postulat des droites parallèles*, peut sembler tellement “évident” que personne ne penserait à le remettre en question. Le voici.

Dessinez une droite (en noir) et un point à côté de la droite (le point E). Le postulat énonce que par le point E ne peut passer qu'une seule droite (celle en rouge) qui soit parallèle à celle en noir. Toutes les autres droites (en bleu) vont nécessairement couper la droite noire.



Évident n'est-ce pas? Et bien, détrompez-vous! Il existe 2 façons de contourner ce postulat !! Mais tout d'abord, il faut bien comprendre ce que veut dire la terme “droite” car, sur la surface de la Terre par exemple, que serait une droite puisque le surface est courbe? En fait, une droite est tout simplement le plus court chemin en deux points. Par exemple, quelle est la distance la plus courte entre Montréal et Paris? C'est ce qu'on appelle un arc de grand cercle (comme l'équateur ou les méridiens). Plus concrètement, imaginez que vous poussiez un rouleau de terrassement sur une surface courbe, alors le rouleau suivrait la distance la plus courte.

Il existe 2 types de géométrie courbe: la sphérique (comme le surface de la Terre) et l'hyperbolique (comme celle d'une selle de cheval).



suite —>

Et voici les réponses contre-intuitives:

Sur une sphère, il n'existe **aucune** droite passant par le point E et parallèle à la droite noire !
Et encore énormément plus bizarre: sur une selle, il existe une **infinité** de droites passant par E et parallèles à la droite noire !!!!!!!

La première (sur la sphère) est assez facile à comprendre. **C'est la deuxième qui est totalement révolutionnaire et beaucoup plus difficile à comprendre !!** On l'appelle géométrie **hyperbolique**, et nous ne l'expliquerons pas ici... (Mais voir le lien avec le destin du cosmos au bas de la page.)

Ces deux géométries (sphérique et hyperbolique) sont dites non-euclidiennes car, justement, elles ne respectent pas le 5e postulat d'Euclide.

Pour plus de détails, voir par exemple ici.

La géométrie hyperbolique a été élaborée de façon totalement indépendante par au moins trois mathématiciens différents (Gauss, Lobatchevski et Bolyai), chacun arrivant exactement au même résultat. Un résultat tellement révolutionnaire et “scandaleux” pour l'époque, que Gauss (un des plus grands mathématiciens de tous les temps) n'a pas osé le publier, que Lobatchevski l'a publié mais a fait rire de lui, de même pour Bolyai qui a sombré dans l'alcoolisme. Pourtant cette théorie était non seulement fondamentale d'un point de vue mathématique mais, en plus, directement reliée à la structure du cosmos! Tel qu'allait le découvrir Einstein 100 ans plus tard. Et aussi tel qu'il faudra en tenir compte pour faire fonctionner le système de repérage GPS!

Cette géométrie était “scandaleuse” à l'époque pour plusieurs raisons:
- elle allait à l'encontre d'Euclide et de 2000 ans d'histoire.
- elle n'était pas entièrement dessinable en 3 dimensions.[1]
- elle détruisait un tabou: l'idée que la géométrie est unique car elle décrit un objet unique: notre univers.

Bref, la découverte de la géométrie hyperbolique fut une immense révolution, une découverte qui allait permettre, pour la première fois, aux mathématiques et à la physique d'aller au-delà de nos sens.

Voir ici pour le lien avec le destin du cosmos.

Stéphane Durand

1 La géométrie hyperbolique est infinie, la selle de cheval n'en est qu'un partie. Il est impossible de dessiner complètement (en 3D) une surface (2D) à courbure négative constante sans avoir de singularité (ex. la pseudo-sphère). Le disque de Poincaré (ou celui d'Escher) est une projection d'un tel espace infini et non une véritable réalisation. Par ailleurs, pour construire un espace non-euclidien à 3D (sphérique ou hyperbolique), il faut nécessairement une 4e dimension! Par exemple, si on peut faire le tour d'une géométrie sphérique à 3D et revenir à son point de départ (l'équivalent de faire le tour de la Terre mais avec une dimension de plus), alors il faut obligatoirement une 4e dimension. Cet exemple donne tout son sens à la dernière phrase du texte ci-dessus.